CONCOURS EXTERNE I.E.E.A.C. CF et CT

Epreuve optionnelle de **Mathématiques**

Durée : 4 heures Coef. : 2

$\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ *désignent respectivement l'ensemble des réels et l'ensemble des complexes ;* $\mathbb{N}$ *désigne l'ensemble des entiers naturels.*

PARTIE I

On se propose d'étudier l'équation différentielle :

(E) : $y'' - y = f(x)$

où x est une variable réelle et f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1°) Démontrer qu'il existe une solution et une seule g de (E) qui soit définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$g(0) = g'(0) = 0$.

Exprimer cette fonction en fonction des intégrales définies :

$$\int_0^x f(t)e^{-t}dt \quad \text{et} \quad \int_0^x f(t)e^{t}dt$$

2°) Que dire de g lorsque f est paire ? Que dire de g lorsque f est impaire ?

3°) On suppose, dans cette question et dans cette question seulement, que f est périodique et de période T. Etablir la formule :

$g(x+T) = g(x) + g(T)\mathrm{ch}x + g'(T)\mathrm{sh}x$

En déduire qu'il existe une solution unique h de (E) qui admette la période T. Montrer que h est paire si f est paire.

4°) On suppose ici que f(x) est positive au sens large pour tout x et qu'il n'existe pas d'intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ sur lequel f soit identiquement nulle.

a) Montrer que g'(x) est du signe de x et n'est nul qu'en 0.

b) Donner le signe de g(x) et de g''(x).

c) Etudier les variations de la fonction :

$$z : x \to \frac{g(x)}{\mathrm{ch}x}$$

et en déduire que, lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, g(x) est infiniment grand devant $|x|^n$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

5°) Dans cette question et dans cette seule question, on prend pour f la fonction périodique paire de période 2 qui, en tout point x du segment $[0, 1]$, vérifie :

$f(x) = x$

a) Représenter graphiquement f.

b) Expliciter l'expression de la restriction de g au segment $[0, 1]$.

c) Soit h la solution périodique de (E) qui admet la période 2 ; que dire de h'(0) et de h'(1) ? Montrer que la restriction de h au segment $[0, 1]$ peut se mettre sous forme :

$$h : x \longrightarrow h(x) = -x + A\,\mathrm{sh}\left(x - \frac{1}{2}\right),$$

où A est une constante réelle que l'on déterminera.

Etudier les variations et le graphe de h et, en particulier, le sens de la concavité.

d) Donner le tableau de variation et le graphe de g ; donner l'expression de $g(x) - h(x)$ sur $\mathbb{R}$; donner un équivalent de g(x) quand x tend vers 0 par valeur positive et quand x tend vers $+\infty$.

6°) On suppose qu'il existe une série entière de rayon de convergence c non nul telle que dans $]-c,+c[$ sa somme soit f.

a) Etablir que, dans $]-c,+c[$, g est la somme d'une série entière S dont on ne cherchera pas à expliciter les coefficients.

b) Montrer que le rayon de convergence de la série S est égal à c.

c) Montrer que toutes les solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ont un développement en série entière de rayon de convergence égal à c.

TOURNER LA PAGE

page 212 ECOLE NATIONALE de l'AVIATION CIVILE:Ingénieurs 1987 Math 2

PARTIE II

On considère maintenant l'équation différentielle :

$$(D) : \quad y^{(n)} - a_1 y^{(n-1)} - \ldots - a_{n-1} y' - a_n y = f(x)$$

où x est une variable réelle, les a_n des constantes complexes et f une application continue d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant 0, à valeurs dans $\mathbb{C}$.
On suppose que le polynôme P :

$$P : X \longrightarrow P(X) = X^n - a_1 X^{n-1} \ldots - a_{n-1} X - a_n$$

a ses n zéros $r_1, r_2, \ldots r_n$ tous distincts.

1°) On suppose dans cette question, et dans cette seule question, que I = $\mathbb{R}$ et que f est périodique de période T non nulle ; on suppose connue une solution u de (D).

a) Montrer que la fonction qui à x associe u(x+T) - u(x) est solution de l'équation "sans second membre" associée à (D). On écrira alors :

$$u(x+T) - u(x) = \mu_1 e^{r_1 x} + \ldots + \mu_n e^{r_n x}$$

b) On écrit la solution générale de (D) sous la forme :

$$y(x) = u(x) + k_1 e^{r_1 x} + \ldots + k_n e^{r_n x}$$

où les k_j sont des constantes. Ecrire les équations liant les k_j et les μ_j pour que la fonction y admette la période T.

c) En déduire que, si aucun des r_j n'est le produit de $\frac{2i\pi}{T}$ par un entier relatif, (D) a une solution périodique de période T unique.

2°) On revient au cas général. On recherche une solution de (D) sous la forme :

$$y(x) = C_1(x) e^{r_1 x} + \ldots + C_n(x) e^{r_n x}$$

a) Montrer que si pour tout x de I les dérivées $C_1'(x), \ldots, C_n'(x)$ vérifient le système d'équations différentielles suivant :

$$(S) : \begin{cases} C_1'(x)e^{r_1 x} + \ldots & \ldots\ldots & + C_n'(x)e^{r_n x} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots + \ldots & \ldots\ldots & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)r_1^j e^{r_1 x} + & \ldots\ldots & + C_n'(x)r_n^j e^{r_n x} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots + & \ldots\ldots & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)r_1^{n-2} e^{r_1 x} + & \ldots\ldots & + C_n'(x)r_n^{n-2} e^{r_n x} = 0 \\ C_1'(x)r_1^{n-1} e^{r_1 x} + & \ldots\ldots & + C_n'(x)r_n^{n-1} e^{r_n x} = f(x) \end{cases}$$

alors y est bien solution de l'équation différentielle (D).

b) Résoudre le système (S) ci-dessus et en déduire l'expression de $C'_j(x)$ en fonction de f(x) , $e^{r_j x}$, et des constantes $r_1, \ldots, r_n$.

c) On pose : $s_j(x) = \int_0^x f(t)e^{-r_j t}\,dt$.

- Montrer que la fonction :

$$g : x \longrightarrow g(x) = \frac{1}{P'(r_1)} e^{r_1 x} s_1(x) + \ldots + \frac{1}{P'(r_n)} e^{r_n x} s_n(x) ,$$

P étant le polynôme défini au début de la deuxième partie, est la seule solution de (D) telle que :

$$g(0) = g'(0) = \ldots = g^{(n-1)}(0) = 0.$$

ECOLE NATIONALE de l'AVIATION CIVILE: Ingénieurs
Math 2
Page 213
1987